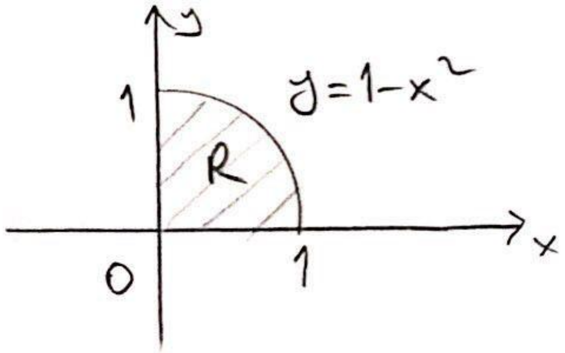
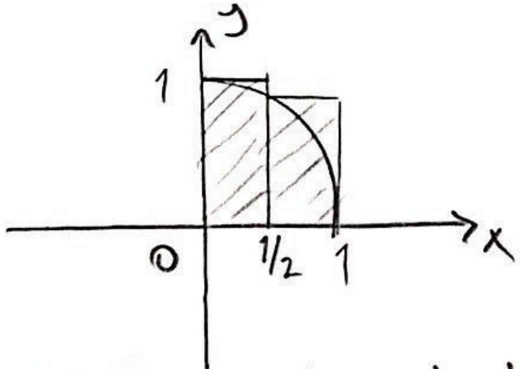
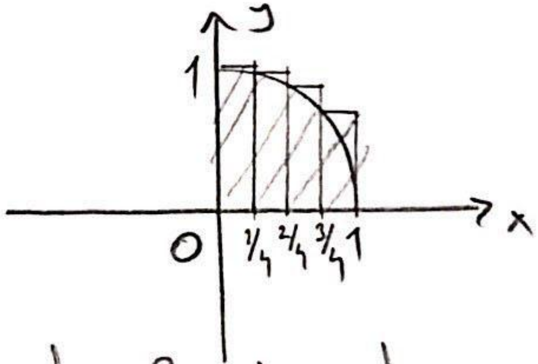
Sonlu toplamlarla tahminde bulunmak ve alan

Belirli integral, matematik ve diğer bilim dallarında önemli büyüklükleri hesaplamak için kullanılan bir araçtır. Bunlar arasında; eğri uzunluğu, alan, hacim ve olasılık gibi büyüklükler vardır. Bu büyüklükleri sonlu toplamlar yardımıyla hesaplayarak belirli integrale başlayacağız.

x ekseni, $y=1-x^2$ eğrisi, $x=0$ ve $x=1$ doğruları arasında kalan R bölgesinin alanını bulmaya çalışalım:







R bölgesini kapsayan dikdörtgenler kullanılarak R nin alanı için bir tahminde bulunulabilir. Bu dikdörtgenler R bölgesinin dışına taştığı için hesaplanan alan R nin alanından büyüktür

[0,1] aralığında dikdörtgenin tabanını oluşturan her alt aralıkta fonksiyonun en büyük değeri hesaplanarak iki dikdörtgenin alanı toplanırsa, R bölgesinin A alanının yaklaşık olarak değeri

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

olarak bulunur. [0,1] aralığı 4 parçaya bölündüğünde ise

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0{,}78125$$

elde edilir.

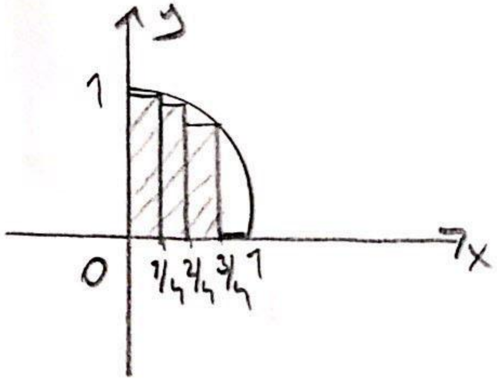
Dikdörtgenler R bölgesini içine aldığından bu tahminler gerçek alandan büyüktür.

Tanım: Yükseklikleri her alt aralıkta fonksiyonun aldığı maksimum değer olan dikdörtgenlerin alanları toplamına üst toplam denir.

Yukarıdaki R bölgesi için hesaplanan 0,875 ve 0,78125 değerleri R için birer üst toplamdır. Bu değerlerden

0,78125 in A ya daha yakın olduğuna dikkat ediniz.
Alanı tahmin için başka yaklaşımlar da vardır.

Tanım: Yükseklikleri her alt aralıkta fonksiyonun minimum değeri olan dikdörtgenlerin alanları toplamına alt toplam denir.



Yandaki şekilde R bölgesinin bir alt toplamı görülmektedir. Buna göre alan

$$A \approx \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{32}=0{,}53125$$

dır. Bu tahmin A dan küçüktür. A nın değeri alt ve üst toplamlar arasındadır.

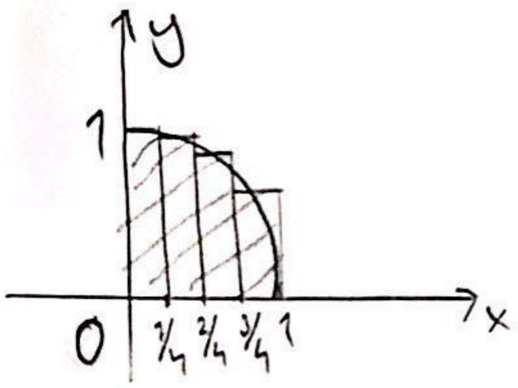
$$\Rightarrow \quad 0{,}53125 < A < 0{,}78125$$

Bu durumda hatanın büyüklüğü için de bir sınır elde edilir. Burada hata

$$0{,}78125-0{,}53125=0{,}25$$

den büyük olamaz.

Bir diğer tahmin ise yükseklikleri tabanlarının orta noktalarında fonksiyonun değerine eşit olan dikdörtgenler kullanılarak elde edilebilir. Bu yönteme orta nokta kuralı denir.

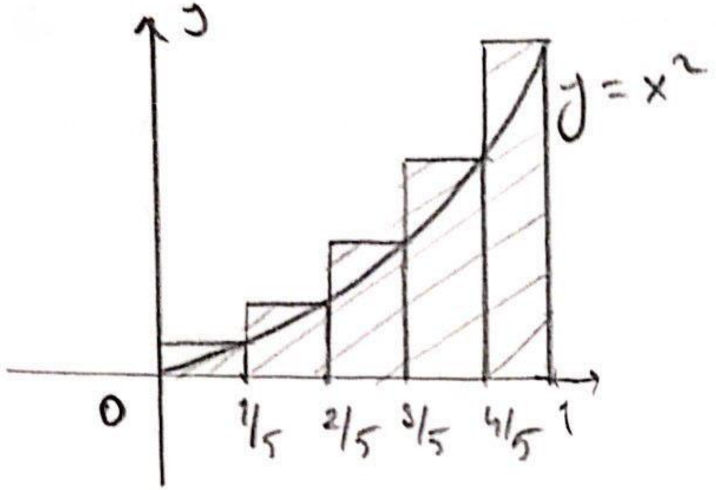


Bu tahmin alt toplam ile üst toplam arasında bir tahmin verir. Fakat alanın gerçek değerinden küçük veya büyük olduğu belli değildir. Orta nokta kuralına göre A alanının yaklaşık değeri

$$A \approx \underbrace{\frac{63}{64}}_{f(1/8)} \cdot \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{55}{64}}_{f(3/8)} \cdot \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{39}{64}}_{f(5/8)} \cdot \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{15}{64}}_{f(7/8)} \cdot \frac{1}{4} = 0,671875 = \frac{43}{64}$$

dür.

Örnek: $[0,1]$ aralığını 5 eşit parçaya bölerek $f(x)=x^2$ fonksiyonunun alt ve üst toplamlarını bulalım:

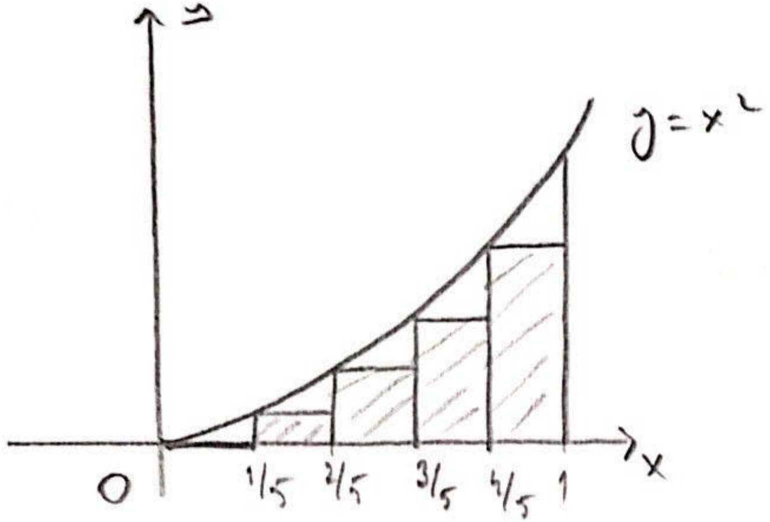


Üst toplam

$$Ü = \frac{1}{5}f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5}f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5}f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5}f\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5}f(1)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + 1\right) = \frac{1}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{55}^{11}}{25} = \frac{11}{25}$$

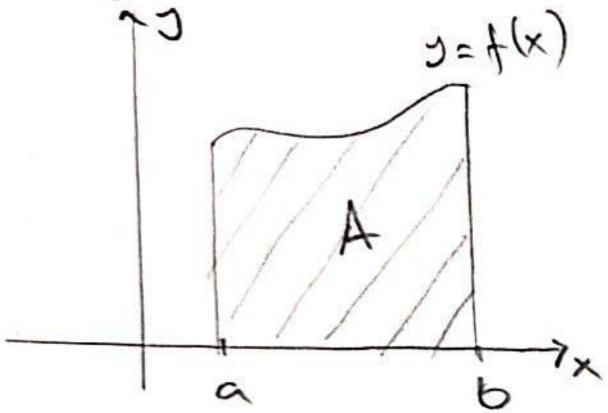
Alt toplam



$$A = \frac{1}{5}f(0) + \frac{1}{5}f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5}f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5}f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5}f\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(0 + \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25}\right) = \frac{1}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{30}^{6}}{25} = \frac{6}{25}$$

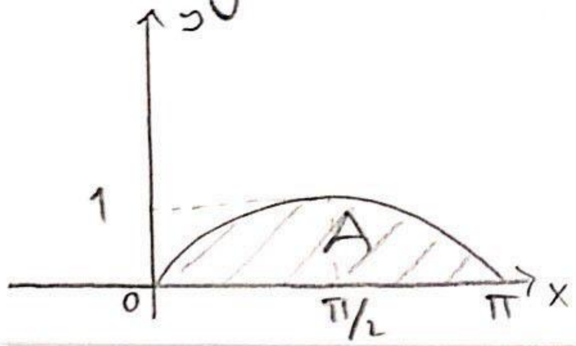
Tanım: $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı, negatif olmayan, sürekli bir f fonksiyonunun ortalama değeri; $y=f(x)$ eğrisi, x ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan bölgenin alanının $b-a$ ile bölümüne eşittir.



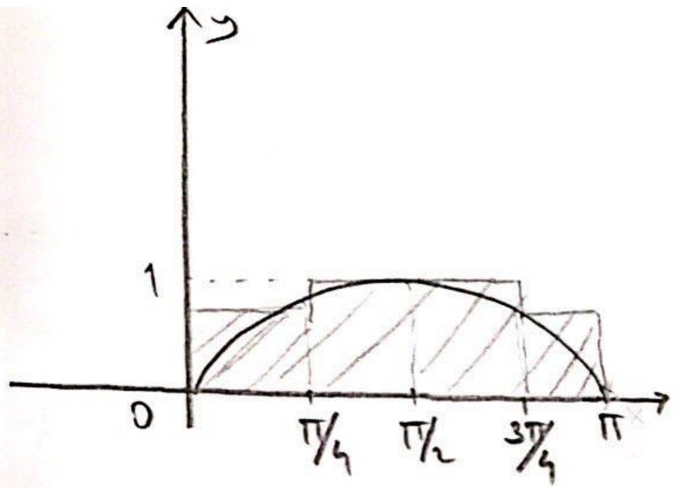
f 'in ortalama değeri

$$\frac{A}{b-a}$$

Örnek: $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığındaki ortalama değerini tahmin edelim.



Şu anda A alanını tam olarak hesaplamayı bilmiyoruz. Fakat A için bir tahminde bulunabiliriz.



A için üst toplam

$$A \approx \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot(2+\sqrt{2})$$

O halde f'in $[0,\pi]$ aralığı üzerindeki ortalama değeri için bir tahmin

$$\frac{\frac{\pi}{4}\cdot(2+\sqrt{2})}{\pi} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Alana yaklaşım için üst toplam kullandığımızdan dolayı ortalama değer için bulduğumuz bu değer gerçek ortalama değerden büyüktür. Eğer verilen $[0,\pi]$ aralığını daha çok alt aralığa bölersek gerçek ortalama değere daha çok yaklaşırız.

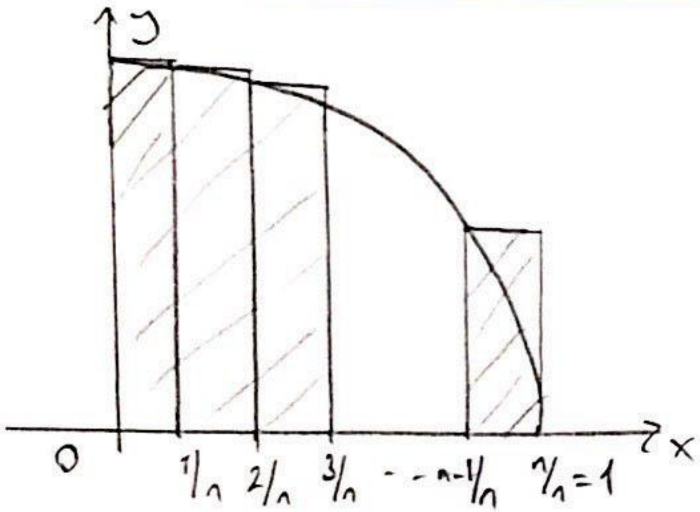
Sonlu toplamların limitleri

Örnek: Sayıları sonsuza ve genişlikleri sıfıra yaklaşan eşit genişlikli dikdörtgenleri kullanarak $y = 1 - x^2$ eğrisi altından ve x ekseninin $[0,1]$ aralığı üstündeki R bölgesinin alanının alt ve üst toplam yaklaşımları için limit değeri bulalım.

$[0,1]$ aralığını eşit uzunluklu n tane alt aralığa bölersek her bir alt aralığın uzunluğu

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

olur. Böylece genişliği $\frac{1}{n}$ olan n tane dikdörtgen elde ederiz. Dikdörtgenin yüksekliği olarak fonksiyonun bu alt aralıklardaki en büyük (en küçük) değerini alırsa R nin alanı için üst (alt) toplam elde ederiz.



üst toplam

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}1 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k^2\right)$$

$$= \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

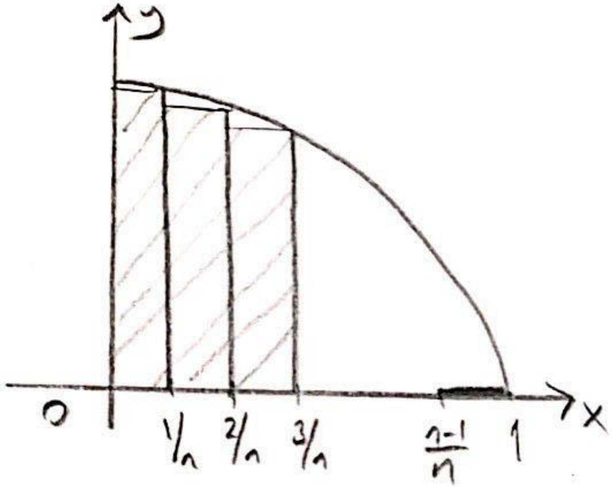
$$= \frac{n-1}{n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

dır. Bu ifadenin $n \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

elde edilir.

Şimdi de R bölgesinin alanının alt toplamı için bir limit değeri bulalım:



Alt toplam

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}1 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

R bölgesinin alanının gerçek değeri alt ve üst toplam tahminleri arasında olacağı için gerçek alan da $\frac{2}{3}$ tür.

O halde, her sonlu toplam yaklaşımının limiti $\frac{2}{3}$ olacaktır.